جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله دوم
بیست و یکمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۲

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های کوتاه	چند گزینه‌ای
-	۶	-

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگه سوالات شما **۱** است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، **در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد**. توجه داشته باشید کد برگه‌ی سولات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.

۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سولات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با **مداد مشکی نرم** در محل مربوط علامت بزنید. لطفا خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۵. در سوال‌های **چهار گزینه‌ای** به هر پاسخ درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی تعلق می‌گیرد. در **مساله‌های کوتاه** به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد.

۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان **صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی** دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.

۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، **در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.**

۱- عدد طبیعی n را سه‌لایه‌ای می‌نامیم، هرگاه بتوان مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های مثبت آن را به سه دسته طوری تقسیم کرد که مجموع اعضای هر سه دسته با هم برابر باشد.

الف. عددی سه‌لایه‌ای مثال بزنید.

ب. ثابت کنید بی‌نهایت عدد سه‌لایه‌ای وجود دارد.

۲- در یک روستا n خانه‌ی وجود دارد $(n \geq 3)$ به‌طوری‌که همه‌ی آن‌ها روی یک خط قرار ندارند. می‌خواهیم یک منبع آب در این روستا احداث کنیم. برای این کار نقطه‌ی A مناسب‌تر از نقطه‌ی B است اگر مجموع فواصل A تا خانه‌ها کمتر از مجموع فواصل B تا خانه‌ها باشد.

نقطه‌ای را ایده‌آل می‌گوییم که هیچ نقطه‌ای مناسب‌تر از آن وجود نداشته باشد. ثابت کنید حداکثر یک نقطه‌ی ایده‌آل برای احداث منبع آب وجود دارد.

۳- n تیم والیبال دو به دو (هر دو تیم دقیقاً یک‌بار) با هم مسابقه داده‌اند. برای هر دو تیم متمایز A و B دقیقاً t تیم وجود دارند که از هر دو تیم A و B باخته‌اند. ثابت کنید $n = 4t + 3$

(توجه کنید که در والیبال تساوی وجود ندارد.)

۴- برای هر سه عدد حقیقی x, y, z با شرط $xyz = 1$، نامساوی زیر را ثابت کنید:

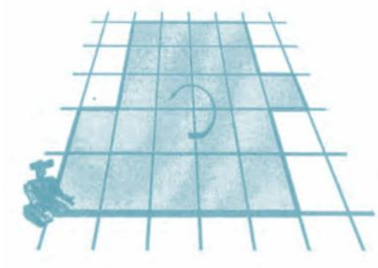
$$x^4 + y^4 + z^4 + x + y + z \geq \frac{x^2}{y} + \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{x} + \frac{z^2}{y}$$

۵- زاویه‌ی $\angle A$ کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث ABC می‌باشد. نقطه‌ی D روی کمان کوچک‌تر BC از دایره‌ی محیطی مثلث ABC واقع است.

عمود منصف‌های AB، AC با خط AD به ترتیب در نقطه‌های M و N برخورد می‌نمایند. نقطه‌ی T محل برخورد BM و CN است. ثابت کنید $BT + CT \leq 2R$.

که R شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABC است.

۶- یک روبات از یک رأس دل‌خواه روی صفحه‌ی شطرنجی بزرگ شروع به حرکت کرده و هر بار یک واحد به یکی از جهت‌های اصلی روی اضلاع صفحه‌ی شطرنجی حرکت می‌کند. این روبات دارای دو خانه‌ی حافظه A و B است که در ابتدای کار در هر دو خانه‌ی عدد صفر قرار دارد.



در هر مرحله برحسب این‌که حرکت به سمت شمال، جنوب، شرق یا غرب باشد، به ترتیب به خانه‌ی A یکی اضافه می‌شود. از خانه‌ی A یکی کم می‌شود، به خانه‌ی B به اندازه‌ی عدد خانه‌ی A اضافه می‌شود یا از خانه‌ی B به اندازه‌ی عدد خانه‌ی A واحد کم می‌شود. فرض کنید روبات مسیری را طی کند که خودش را قطع نکرده و در نهایت به‌جای اول خود بازگردد. ثابت کنید در انتهای مسیر قدرمطلق مقدار خانه‌ی حافظه B، برابر با مساحت درونی شکلی است که روبات پیموده.

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست‌ودومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۲

۱- الف. با اندکی محاسبه و در نظر گرفتن حالت‌های مختلف می‌توان مشاهده کرد که اگر عددی حداکثر دو عامل اول داشته باشد، نمی‌تواند سه لایه‌ای باشد. به علاوه با تلاش بیشتر می‌توان دید که ۱۲۰ عددی سه لایه‌ای است، زیرا $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۸,۱۰,۱۲,۱۵,۲۰,۲۴,۳۰,۴۰,۶۰,۱۲۰\}$ مجموعه مقسوم‌علیه‌های ۱۲۰ است و $۱+۲+۳+۴+۵+۶+۸+۱۰+۱۲+۱۵+۲۴+۳۰=+۲۰+۴۰+۶۰=۱۲۰$.

ب. فرض کنید p عددی اول بزرگ‌تر از ۵ باشد. در این صورت هر مقسوم‌علیه $۱۲۰p$ یا مقسوم‌علیهی از ۱۲۰ است و یا p برابر یک مقسوم‌علیه ۱۲۰. پس می‌توان با استفاده از استدلال بالا و اضافه کردن p برابر اعضای هر دسته (که در سه لایه‌ای بودن ۱۲۰، مقسوم‌علیه‌های ۱۲۰ را به آن‌ها افراز کردیم) به آن دسته، نشان داد که $۱۲۰p$ هم سه‌لایه‌ای است. حال چون تعداد چنین اعداد اولی نامتناهی است، نامتناهی عدد سه لایه‌ای داریم.

۲- ابتدا یک لم را ثابت می‌کنیم.

لم. فرض کنید B, A و C سه نقطه‌ی در صفحه‌ی باشند و M نقطه‌ی وسط BC باشد. در این صورت $AM \leq \frac{AB+AC}{۲}$.

اثبات. اگر سه نقطه هم‌خط باشند که به سادگی می‌توان دید که تساوی برقرار است. حال اگر این سه نقطه‌ی تشکیل یک مثلث بدهند، فرض کنید نقطه $A_۱$ قرینه‌ی A نسبت به M باشد. در این صورت در چهارضلعی $ABA_۱C$ قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند و بنابراین یک متوازی‌الاضلاع است. به‌علاوه دقت کنید که $AA_۱ = ۲AM \;,\; AB = CA_۱$. حال با توجه به نامساوی مثلث در مثلث $AA_۱C$، $AA_۱ < AC + CA_۱$ و در نتیجه $۲AM < AB + AC$ که همان چیزی است که می‌خواستیم.

حال فرض کنید خانه‌های روستا را با $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n نمایش دهیم. به برهان خلف فرض کنید X و Y دو نقطه‌ی ایده‌آل باشند و M وسط XY. حال با استفاده از لم بالا در مثلث‌های $A_۱XY$، $A_۲XY$، ... و A_nXY (البته ممکن است در بعضی حالت‌ها سه نقطه‌ی هم‌خط باشند که باز هم لم درست است) داریم:

$$A_۱M \leq \frac{A_۱X + A_۱Y}{۲}, A_۲M \leq \frac{A_۲X + A_۲Y}{۲}, \ldots, A_nM \leq \frac{A_nX + A_nY}{۲}$$
$$\Rightarrow A_۱M + A_۲M + \ldots A_nM \leq \frac{۱}{۲}(A_۱X + \ldots + A_nX + A_۱Y + \ldots + A_nY)$$

اما دقت کنید که ازآنجایی‌که همه‌ی خانه‌های روستا نمی‌توانند روی یک خط و درنتیجه روی خط واصل بین X و Y واقع باشند. پس حداقل یکی از نامساوی‌ها اکید است و لذا مجموعه‌ی فاصله‌ی خانه‌های روستا تا M کمتر از مجموع فاصله‌ی آن‌ها تا X و یا Y است که این با ایده‌آل بودن آن‌ها تناقض دارد.

۳- برای این مسابقه‌ها به این صورت یک گراف جهت‌دار درست می‌کنیم که به ازای هر تیم یک رأس قرار می‌دهیم و اگر تیم A از B برده باشد، یالی جهت‌دار از A به B رسم می‌کنیم. حال فرض کنید مجموعه‌ی تیم‌هایی که از تیم خاصی مثل A باخته‌اند (متناظراً به زبان گراف یعنی رأس‌هایی که یال بین آن‌ها و رأس A، از یال A خارج شده باشد) را با نماد S_A نمایش می‌دهیم. حال برای هر تیم B در S_A باید دقیقاً t تیم موجود باشند که از هر دوی A و B باخته‌اند. بنابراین رأس متناظر با این تیم‌ها باید در S_A باشد. در نتیجه از بین یال‌هایی که یک سر آن‌ها به B متصل است و یک سر دیگرشان در S_A قرار دارد دقیقاً t یال از B خارج می‌شوند. از آنجا که B رأس دل‌خواهی از S_A بود، برای هر تیم دیگری در این مجموعه وضعیت مشابه است. بنابراین تعداد یال‌هایی که هر دو سر آن‌ها در S_A است، برابر $t\,|S_A|$ است که منظور از $|S_A|$ تعداد تیم‌های موجود در S_A است. از طرف دیگر تعداد کل این یال‌ها برابر

$\binom{|S_A|}{۲} = \frac{|S_A|(|S_A|-۱)}{۲}$ است. (بین هر دو یالی در یک یال وجود دارد.) پس $t|S_A| = \frac{|S_A|(|S_A|-۱)}{۲}$ و در نتیجه $|S_A| = ۲t+۱$. این استدلال نشان می‌دهد که تعداد تیم‌هایی که به هر تیم باخته‌اند مساوی $۲t+۱$ است. بنابراین از هر رأس در گراف دقیقاً $۲t+۱$ یال خارج می‌شود. پس تعداد کل یال‌ها برابر $n(۲t+۱)$ است. از طرف دیگر با توجه به این‌که هر دو تیمی با هم بازی کرده‌اند؛ بین هر دو رأسی یک یال قرار دارد. بنابراین از طرف دیگر تعداد کل یال‌ها برابر $\binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$. پس

$n(۲t+۱) = \frac{n(n-۱)}{۲}$ و در نتیجه $n = ۲(۲t+۱)+۱ = ۴t+۳$ است.

۴-

$$
\begin{aligned}
& x^۴+y^۴+z^۴+۳(x+y+z)-\left(\frac{x^۲}{y}+\frac{x^۲}{z}+\frac{y^۲}{z}+\frac{y^۲}{x}+\frac{z^۲}{x}+\frac{z^۲}{y}\right) \\
&= x^۴+y^۴+z^۴+۳(x+y+z)+(xyz)\left(\frac{x^۲}{y}+\frac{x^۲}{z}+\frac{y^۲}{z}+\frac{y^۲}{x}+\frac{z^۲}{x}+\frac{z^۲}{y}\right) \\
&= x^۴+y^۴+z^۴+۳(x+y+z)+x^۳z+x^۳y+y^۳x+y^۳z+z^۳y+z^۳x \\
&= x^۳(x+y+z)+y^۳(x+y+z)+z^۳(x+y+z)+۳(x+y+z) \\
&= (x+y+z)(x^۳+y^۳+z^۳+۳) \\
&= (x+y+z)(x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz) \\
&= (x+y+z)^۲(x^۲+y^۲+z^۲-xy-yz-zx) \\
&= \frac{۱}{۲}(x+y+z)^۲((x-y)^۲+(y-z)^۲+(z-x)^۲) \geq ۰
\end{aligned}
$$

دقت کنید که در خط اول به دوم و خط پنجم به ششم از فرض مسئله‌ی $(xyz=-۱)$ و در خط ششم به هفتم از اتحاد اویلر استفاده کرده‌ایم. ضمناً نامساوی آخر نشان می‌دهد که حالت تساوی زمانی است که یا مجموع متغیرها صفر باشد و یا هر سه برابر باشند که با توجه به $xyz=-۱$ نتیجه می‌شود هر سه باید برابر -۱ باشند.

۵- CT را امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی را برای بار دوم در نقطه‌ی X قطع کند. در این صورت:

$$\angle XBT = \angle XBA + \angle ABM = \angle XBA + \angle ABM = \angle NCA + \angle ABM$$

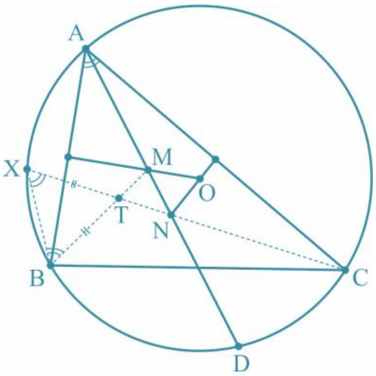
با توجه به این‌که M روی عمودمنصف AB و N روی عمودمنصف AC قرار دارد، $\angle MBA = \angle MAB$ و $\angle ACN = \angle CAN$ بنابراین

$$\angle XBT = \angle CAN + \angle MAB = \angle BAC = \angle CXB$$

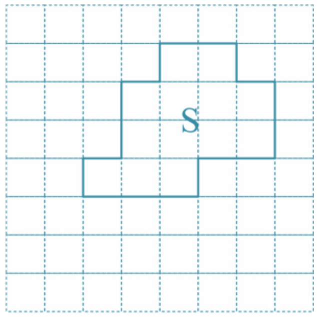
پس مثلث TXB متساوی‌الساقین است و لذا $XT = TB$ درنهایت

$$BT + CT = XT + TC = CX = ۲R.\sin(\angle XBC) \leq ۲R$$

بنابراین اثبات حکم به پایان رسید.



۶- نقطه‌ی شروع حرکت روبات را مبدأ مختصات فرض می‌کنیم و شکلی که محیط آن را پیموده S می‌نامیم. عدد خانه‌ی A همواره مؤلفه‌ی دوم مختصات روبات را نشان می‌دهد زیرا در ابتدا صفر است و هرگاه مؤلفه‌ی دوم ربات یکی اضافه می‌شود، A نیز یکی اضافه می‌شود و هرگاه مؤلفه دوم ربات یکی کم می‌شود، A نیز یکی کم می‌شود. بنابراین می‌توان تغییرات عدد خانه‌ی B را این‌طور بیان کرد که هرگاه روبات به سمت شرق حرکت می‌کند به‌اندازه‌ی مؤلفه‌ی y در آن نقطه‌ی به B اضافه می‌شود و هرگاه روبات به سمت غرب حرکت می‌کند به‌اندازه‌ی مؤلفه y در آن نقطه‌ی از B کم می‌شود.



ابتدا فرض می‌کنیم روبات مسیر طی شده را در جهت ساعت‌گرد طی کرده باشد. همه‌ی مربع‌های شبکه‌ای که درون S قرار دارند را در نظر بگیرید و آن‌ها را $M_1, M_2, \ldots, M_k$ بنامید. فرض کنید مختصات رأس پایین سمت چپ M_i، (x_i, y_i) باشد. به ازای هر مربع M_i به هر یک از دو ضلع آن‌یک عدد نسبت می‌دهیم. به ضلع پایینی مربع M_i، عدد $-y_i$ را نسبت دهید و به ضلع بالایی M_i، عدد $y_i + 1$ را نسبت دهید. دقت کنید که چون بعضی از ضلع‌های افقی در دو مربع حضور دارند به آن‌ها دو بار عدد نسبت داده می‌شود.

اکنون اعداد نسبت داده‌شده به همه‌ی ضلع‌های مذکور را با هم جمع می‌کنیم و مجموع آن‌ها را D می‌نامیم. اکنون D را به دو طریق محاسبه می‌کنیم.

اولاً دقت کنید که مجموع دو عددی که به ضلع‌های هر مربع نسبت داده‌ایم برابر یک است. پس D برابر می‌شود با تعداد مربع‌ها که همان مساحت S است.

از طرف دیگر ضلع‌های افقی‌ای که روی مرز S قرار ندارند، در دو مربع حضور دارند، در یکی با علامت مثبت و در دیگری با علامت منفی و مجموع این دو عدد صفر می‌شود. در نتیجه تنها جملاتی باقی می‌مانند که مربوط به یال‌های افقی روی مسیر روبات هستند. که این مقادیر دقیقاً همان مقادیری هستند که هنگام حرکت روبات روی مسیر به عدد خانه‌ی B اضافه می‌شوند. بنابراین مجموع این مقادیر دقیقاً همان عدد نهایی خانه‌ی B است. پس حکم ثابت شد.

در حالتی که روبات در جهت پادساعت‌گرد حرکت کند، مقادیر نسبت داده شده به اضلاع مرزی، منفی مقادیری هستند که با B جمع می‌شوند، پس در این حالت B برابر است با منفی D و در نتیجه قدر مطلق آن همان $-D$ می‌شود که برابر با مساحت S است.